MATHÉMATIQUES II

Statistique et probabilités

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 2

N. B. — *Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible...).*

EXERCICE I (*noté sur 6 points*)

N. B. — Dans cet exercice, **TOUS** les nombres figurant dans le tableau de calcul seront arrondis, au plus proche, à 0,001 près et les calculs seront effectués **UNIQUEMENT** à partir de ces valeurs. Les résultats demandés seront indiqués avec la même précision.

On considère la statistique ci-dessous dans laquelle :

x_i représente un revenu en francs;

N_i représente le nombre de revenus supérieurs ou égaux à x_i.

x_i	N_i
10 000	3 156 558
20 000	471 637
30 000	122 924
50 000	48 492
100 000	5 075
200 000	976
300 000	235
500 000	54

1° On pose $u_i = \log x_i$ et $v_i = \log N_i$ où la notation log désigne le logarithme décimal.

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

u_i	v_i
...	...
...	...
...	...

Représenter, sur papier à échelles arithmétiques, le nuage des points $M_i(u_i, v_i)$.

Axe des u : origine : point d'abscisse 4; unité : 10 cm;

Axe des v : origine : point d'ordonnée 1; unité : 4 cm.

2° On se propose d'ajuster ce nuage par une droite en utilisant la méthode des moindres carrés.

a. Compléter le tableau du 1° afin de faire apparaître tous les résultats nécessaires au calcul demandé en *c.*

b. Citer les formules donnant les coefficients de l'équation cherchée.

c. Donner l'équation de la droite des moindres carrés ajustant v par rapport à u.

d. Tracer cette droite d'ajustement sur le graphique précédent.

3° En déduire les réels A et α, compris entre 1 et 10, et l'entier naturel k tels que $N = \frac{A\,10^k}{x^\alpha}$.

EXERCICE II (*noté sur 14 points*)

Une machine remplit des paquets dont le poids prévu est 250 g.

Soit X la variable aléatoire ayant pour valeurs les poids possibles d'un paquet à la sortie de la machine.

E.S.C.A.E. 1980 (T)

I

Dans cette partie on suppose que X est la variable aléatoire discrète de loi de probabilité

x_i	220	230	240	250	260	270	280
p_i	0,07	0,11	0,19	0,26	0,18	0,13	0,06

1° Calculer, à 0,001 près par défaut, l'écart-type de X.

2° On prélève successivement n paquets et on admet que, bien qu'étant exhaustifs, les tirages ne modifient pas la composition de la population.

a. On choisit $n = 10$.

Calculer : la probabilité p' que au moins un paquet pèse 220 g;
la probabilité p'' que au plus un paquet pèse 220 g.

Les valeurs de p' et p'' seront arrondies, au plus proche, à 0,001 près.

b. Déterminer la valeur minimum n_0 de n pour que la probabilité d'obtenir au moins un paquet de 220 g soit supérieure à 0,95.

3° Afin de limiter la mise en vente de paquets dont le poids est inférieur à 250 g, a production est contrôlée à la sortie de la remplisseuse.

On admet que la probabilité que le paquet soit signalé non conforme par le contrôle est :

1 si son poids est 220 g;
0,9 si son poids est 230 g;
0,8 si son poids est 240 g.

a. Calculer la probabilité qu'un paquet venant d'être rempli soit déclaré non conforme par le contrôle.

b. Le coût du paquet à la sortie de la remplisseuse est évalué à 5 centimes le gramme.

Les paquets déclarés non conformes par le contrôle sont complétés afin que leur poids soit effectivement rendu supérieur ou égal à 250 g.

On considère que le coût d'un paquet complété est égal au coût résultant de son poids initial majoré d'une somme forfaitaire de 5 F.

Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeurs les coûts possibles d'un paquet à la mise en vente.

Calculer l'espérance mathématique de Y.

II

Dans cette partie on suppose que $X = 220 + 10\,Z$ où Z suit la loi de Poisson de paramètre 3.

1° Quel est, à 0,001 près par défaut, l'écart-type de X.

2° Calculer les probabilités $P(X = 220)$; $P(X = 230)$; $P(X = 240)$. Ces valeurs seront arrondies, au plus proche, à 0,001 près.

3° On reprend les hypothèses du I-3°). Calculer :

a. La probabilité qu'un paquet venant d'être rempli soit déclaré non conforme par le contrôle (arrondir le résultat, au plus proche, à 0,001 près);

b. La probabilité qu'un paquet pèse 240 g sachant qu'il a été déclaré non conforme (donner la réponse avec le même arrondi);

c. L'espérance mathématique de la variable aléatoire Y définie au I-3° *b.*, compte tenu de la nouvelle loi de probabilité choisie pour X.

III

Dans cette partie on suppose que X suit une loi normale $\mathcal{N}(250, 16)$.

1° Calculer les probabilités : $P(X = 220)$; $P(X = 230)$; $P(X = 240)$.

N. B. — Étant donné que l'on réalise une approximation d'une loi discrète par une loi continue on remplace :

$X = 220$ par $X < 225$;

$X = 230$ par $225 \leqslant X < 235$;

$X = 240$ par $235 \leqslant X < 245$, etc.;

— Les valeurs de l'aléa centré réduit T, nécessaires à l'utilisation des tables seront arrondies, au plus proche, à 0,01 près;

— Les probabilités demandées seront fournies avec la précision permise par ces tables.

2° On reprend à nouveau les hypothèses du I-3°.

Calculer, compte tenu de la nouvelle loi de probabilité choisie pour X, l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y définie au I-3° *b.*

3° En tenant compte du *nota bene* du 1°, représenter, sur papier gausso-arithmétique, le nuage de points correspondant à la distribution donnée en I et tracer la droite de Henry représentant la loi normale choisie en approximation de cette distribution. (On précisera les coordonnées de deux points permettant le tracé de cette droite.)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail